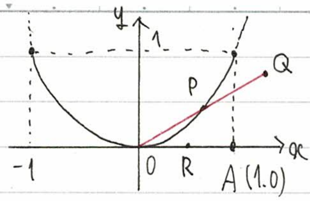
2018年　東大文系数学　第4問

(1) $P(p, p^2)$ とおく
但し $-1 \leqq p \leqq 1$



$\overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OP}$
$= (2p, 2p^2)$

$\overrightarrow{OQ} = (x, y)$ とおくて

$\begin{cases} x = 2p \\ y = 2p^2 \end{cases}$　パラメータを消去して、

$y = 2p^2 = 2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}x^2$

$-1 \leqq p \leqq 1$　より　$-1 \leqq \frac{x}{2} \leqq 1 \iff -2 \leqq x \leqq 2$

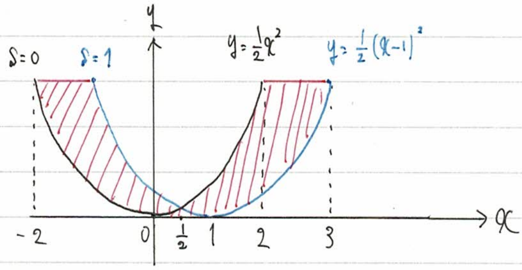
よって点Qの軌跡は
$y = \frac{1}{2}x^2$ 上の $-2 \leqq x \leqq 2$ の部分 //

(2) $R(r, 0)$ とおく　但し　$0 \leqq r \leqq 1$

$\overrightarrow{OS} = 2\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR}$
$= \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$

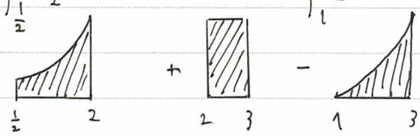
よって点Sは (1)の点Qを $\overrightarrow{OS}$ の方向に
移動させたものである。

つまり (1) で求めた軌跡を
x軸方向に 0から1 動かしたときの
通過領域である。



この面積は、
$x = \frac{1}{2}$ で線対称なので、

$$2 \times \left\{ \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{2}x^2\,dx + 1\times 2 - \int_{1}^{3} \frac{1}{2}(x-1)^2\,dx \right\}$$



$$= 2\times\left\{ \left[\frac{1}{6}x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{2} + 2 - \left[\frac{1}{6}(x-1)^3\right]_{1}^{3} \right\}$$

$$= 2\left\{ \frac{4}{3} - \frac{1}{48} + 2 - \left(\frac{4}{3} - 0\right) \right\}$$

$$= \frac{95}{24}$$ //